

**Esame Geometria 3: 14 luglio 2023**  
**Prof. P.A. Oliverio - Dr. F.G. Infusino**

**Esercizio 1.** Si consideri la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  così definita:

$$\gamma(t) = (2 \cos t + 2t, 2(\cos t - t), \sqrt{8} \sin t)$$

- (1) Determinare la curvatura e la torsione di  $\gamma$ . (4 pt.);
- (2) Determinare il triedro di Frenet-Serret nel punto  $\gamma(0)$ . (2 pt.);

**Esercizio 2.** Si consideri la superficie  $S$  ottenuta ruotando attorno all'asse  $z$  la circonferenza, che giace nel piano  $xz$ , di centro  $C = (4, 0, -2)$  e raggio 1.

- (1) Determinare una parametrizzazione regolare per  $S$ . (2 pt.);
- (2) Stabilire la natura dei punti di  $S$ . (4 pt.);

**Esercizio 3.** (1) Determinare la trasformazione lineare fratta  $f$  che manda  $5$  in  $\infty$ ,  $1 - i$  in  $-\frac{7}{17} + \frac{6}{17}i$  e  $0$  in  $-\frac{i}{5}$ . (3 pt.);

(2) Determinare l'immagine tramite  $f$  di  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4| \leq 1\}$ . (3 pt.);

**Esercizio 4.** Calcolare il valore dei due seguenti integrali:

$$\oint_{\gamma(i;2)} \frac{\sin(z+1) - e^z \cos(z)}{z^2} dz, \quad \text{e} \quad \oint_{\gamma(-1;9)} z^3 \sin\left(\frac{1}{z-2i}\right) dz \quad (3\text{pt.})$$

Dire inoltre quanti zeri possiede il polinomio  $p(z) = 7z^{12} - z^7 - 2z^6 + 2z^4$  all'interno della regione anulare  $0 < |z| < 1$ ? (3 pt.)

**Esercizio 5.** Trovare la serie di Laurent centrata in  $z = -i$  della funzione

$$f(z) = \frac{i}{z^2 + 8iz - 7} \quad (3\text{pt.});$$

Determinare infine poli e zeri in  $\mathbb{C}_\infty$ , con rispettive molteplicità, ed eventuali singolarità eliminabili della funzione:

$$f(z) := \frac{z^8(z-2)^4(z+2)^3}{z^9(z^2-4)^3(z-1)^3} \quad (3\text{pt.});$$